

I-137 層流における円管内壁面液体すべりの統一表現

小 島 昇*

On the Unified Expression of Liquid Slippage on the Pipe Wall under the Laminar Flow

Noboru KOJIMA*

Abstract

When a liquid flows in a passage, it has been considered for a long time that there is no slip of the liquid contacted with the passage wall surface; however, there are some cases where the slippage cannot be neglected under certain condition of the wall surface.

The slippage index is able to express the slippage proportion commonly and quantitatively in the same wall surface condition, but the relation between the slippage index and various factors concerning the slippage (as physical properties of the liquid and surface conditions), has been not cleared.

In this paper, the dimensional analysis gives us the relation between the slippage velocity and the factors, such as the viscosity, the density and the surface tension of the liquid, the characteristic length of the passage, the mean velocity, the pressure drop rate and the contact angle between liquid and solid.

Consequently, the slippage velocity ratio (the ratio of the slippage velocity to the mean velocity) is expressed as a function of three dimensionless quantities; that is, the Reynolds number, the Weber number and the contact angle, and an experimental equation which expresses the slippage velocity independently of the surface condition, was obtained.

It was cleared from the result that the slippage index is independent of the pipe radius and is expressed by the physical properties of the liquid; that is the viscosity, the density, the surface tension and the contact angle.

1. 緒 言

従来、流路の固体壁面上を流れる液体は壁面に付着し、すべらないとしてすべりを無視してきたが、ガラス製の直円管の場合、壁面の表面状態の違いによりすべりの度合いが異なり、さらに、半径が大きくなるとすべきの影響が大きくなることを明らかにした¹⁾。

その結果、従来用いられていたすべり係数およびすべり無次元量の代わりに円管半径には関係なく、壁面の表面状態のみによって決まるすべり指数(すべり無次元量/水力平均深さ)を提案し、同じ表面状態に対しすべりを共通的に、定量的に表すことを可能とした。

しかし、すべり速度あるいはすべり指数などに、液体の物性値や壁面の表面状態など、どのような因子が関与しているかは明かにされなかった。

そこで、本論文では、壁面流動すべりに関与すると考

えられる諸因子、すなわち、液体の粘度、密度および表面張力、流路の代表寸法、平均流速、圧力降下率および液体と固体表面との接触角と壁面上の液体のすべり速度との関係を次元解析により導き、この関係からすべり速度と平均流速との比、すなわち、すべり速度比が Reynolds 数、Weber 数ならびに接触角の 3 個の無次元量の関数として表し得ることを示し、すべり速度比に関する実験式を求めた。

これにより、壁面の表面状態、液体の粘度、密度および表面張力などを組合わせた一つの式ですべり速度を統一的に表わすことが可能となった。

2. すべり理論

Fig. 1 に示すように、円管内液体流れにおいて、壁面

* 明治大学工学部精密工学科

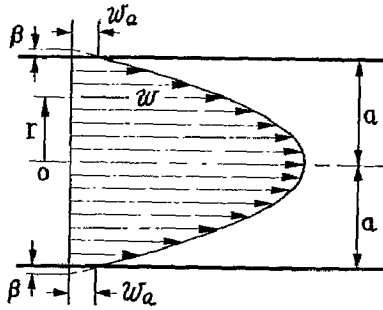


Fig. 1 Slip flow in a circular pipe

上での液体のすべりを考慮した場合、半径 a の円管の中心軸から r なる距離における流速 w は、流れが層流で定常流であり、かつ、液体が非圧縮性であれば、Navier-Stokes の運動方程式から、次式のように求められる。

$$w = \frac{\Delta p}{4\eta l} (a^2 - r^2) + w_a \quad (1)$$

ここに、 l : 差圧取出口間の距離

Δp : 差圧

w_a : すべり速度

η : 液体の粘度

流路が円管の場合、最大流速 w_{\max} は円管中心軸上に生じるので、 w_{\max} は次式のように導かれる。

$$w_{\max} = \frac{a^2 \Delta p}{4\eta l} + w_a \quad (2)$$

また、流量 Q および平均流速 \bar{w} は(1)式よりつぎのように求められる。

$$Q = \frac{\pi a^4 \Delta p}{8\eta l} + \pi a^2 w_a \quad (3)$$

$$\bar{w} = \frac{Q}{\pi a^2} = \frac{a^2 \Delta p}{8\eta l} + w_a \quad (4)$$

(2)式と(4)式より w_a/\bar{w} と w_{\max}/\bar{w} との関係が次式のように得られる。

$$\frac{w_a}{\bar{w}} = 2 - \frac{w_{\max}}{\bar{w}} \quad (5)$$

Fig. 1 に示されるすべり係数 β はつぎのように表される²⁾。

$$w_a = \beta \left[-\frac{\partial w}{\partial r} \right]_{r=a} = \frac{a \Delta p \beta}{2\eta l} \quad (6)$$

(2)式と(4)式および(6)式より

$$\frac{w_{\max}}{\bar{w}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{4}{a}\beta} = 1 + \frac{1}{1 + 2\beta^*} \quad (7)$$

ここに、 β^* : すべり無次元量 ($=\beta/m$)

m : 水力平均深さ ($=a/2$)

となり、(7)式を(5)式に代入することにより、すべり速度比 w_a/\bar{w} は

$$\frac{w_a}{\bar{w}} = 1 - \frac{1}{1 + 2\beta^*} \quad (8)$$

となり、すべり無次元量 β^* のみの関数として表される。

3. 次元解析

すべり速度 w_a は液体の物性値 (粘度 η , 密度 ρ および表面張力 σ_L)、流路の代表寸法 (円管直径 d)、平均流速 \bar{w} 、圧力降下率 $\Delta p/l$ および液体と固体表面との接触角 θ_i などにより影響をうけるものと考えられる。

それゆえ、すべり速度 w_a は ρ , η , d , \bar{w} , $\Delta p/l$, σ_L および θ_i の関数とみなすことができ、次式のように表すことができる。

$$F(w_a, \rho, \eta, d, \bar{w}, \Delta p/l, \sigma_L, \theta_i) = 0 \quad (9)$$

ここで、基本単位を長さ、質量および時間とすると、 θ_i は角度であるので、 θ_i を除いた上式中の 7 個の変数から $7-3=4$ 、すなわち、4 個の無次元比が求められる。

そこで、(9)式中の変数から、くり返し変数として d , \bar{w} および ρ を採用して、Buckingham の II 定理により w_a , η , $\Delta p/l$ および σ_L についての無次元比 Π_i ($i=1\sim 4$) を求めると、(9)式は次式のように表すことができる。

$$F(\theta_i, \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4) = 0 \quad (10)$$

ここに、 $\Pi_1 = d^{d_1} \bar{w}^{b_1} \rho^{c_1} w_a^{d_1}$

$\Pi_2 = d^{d_2} \bar{w}^{b_2} \rho^{c_2} \eta^{d_2}$

$\Pi_3 = d^{d_3} \bar{w}^{b_3} \rho^{c_3} (\Delta p/l)^{d_3}$

$\Pi_4 = d^{d_4} \bar{w}^{b_4} \rho^{c_4} \sigma_L^{d_4}$

くり返し変数としない変数 w_a , η , $\Delta p/l$ および σ_L の指数を $d_1=d_2=d_3=d_4=-1$ とおき、基本単位の長さ、質量および時間について次元解析をすると、無次元比 Π_i はそれぞれつぎのように導かれる。

$$\left. \begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{w_a}{\bar{w}} \\ \Pi_2 &= \frac{d \bar{w} \rho}{\eta} = Re \\ \Pi_3 &= \frac{d}{l} \cdot \frac{2 \Delta p}{\rho \bar{w}^2} = f_D \\ \Pi_4 &= \frac{d \rho \bar{w}^2}{\sigma_L} = We \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ここに、 f_D : Darcy の摩擦係数³⁾

Re : Reynolds 数

We : Weber 数

よって、(10)式と(11)式から次式が導かれる。

$$\frac{w_a}{\bar{w}} = F(\theta_t, Re, f_D, We) \quad (12)$$

さらに、壁面上の液体のすべりを考慮した場合の流量は(3)式で示されるので、圧力降下率 $4p/l$ は ρ , η , d , \bar{w} および w_a の関数とみなすことができ、前述と同じように II 定理によって f_D , Re および w_a/\bar{w} なる無次元比がもとめられ、 f_D は次式のように表すことができる。

$$f_D = f'\left(Re, \frac{w_a}{\bar{w}}\right)$$

よって、上式と(12)式の関係により、すべり速度比 w_a/\bar{w} は次式のようになる。

$$\frac{w_a}{\bar{w}} = f(\theta_t, Re, We) \quad (13)$$

すべり速度比 w_a/\bar{w} はすべり理論により求めた(8)式において、すべり無次元量 β^* の関数として表され、また、次元解析より求めた(13)式において、接触角 θ_t 、Reynolds 数 Re および Weber 数 We の関数として表される。

したがって、(8)式と(13)式の関係を考えることにより、つぎの関係を導くことができる。

$$2\beta^* = C_s \theta_t^{n_1} Re^{n_2} We^{n_3} \quad (14)$$

ここに、 C_s ：無次元係数

(14)式を(8)式に代入すると、すべり速度比 w_a/\bar{w} は次式のように導かれる。

$$\frac{w_a}{\bar{w}} = 1 - \frac{1}{1 + C_s \theta_t^{n_1} Re^{n_2} We^{n_3}} \quad (15)$$

上式における無次元係数 C_s 、指数 n_1 , n_2 および n_3 は流路壁面の表面状態あるいは流量などの条件を変えて実験的に求めたすべり速度比 w_a/\bar{w} の値を用いて定められる。

以上のことから、すべり速度は液体の物性値（粘度、密度および表面張力）、流路の代表寸法、流路の表面と

液体との接触角および平均流速に依存するものと考えることができる。

4. 実験装置と実験

実験装置の概略図は Fig. 2 に示すとおりである。

測定用液体には水道水を利用し、水道水は定水頭タンク 1 から水温制御ヒーターで液温を制御されて定水頭タンク 2 に入り、定水頭タンク 2 でヘッドが一定となって測定部ガラス管に流入する。

測定部ガラス管は、流速測定用レーザー光を通すための測定部分を除いて、すべて断熱材で覆って温度変動を極力防いだ。

液温測定に関しては、デジタル型サーミスタ温度計を定水頭タンク 2（上流側）の入口とガラス管出口近傍（下流側）とに設置してそれぞれ液温を測定し、上流側と下流側の温度差がないことを測定中常時監視して確認する。

流速測定は、レーザードップラ流速計（デュアルビームモード前方散乱システム）を用いて、流れが十分発達した測定部ガラス管下流側で入口から約 1700 mm の位置で行う。

流量測定は、まえもって基準ビュレットで器差を校正したメスシリンダを用い、ガラス管出口から流出する液体の体積を 100 秒間計測し、単位時間当り流出する体積を算出して体積流量とし、流速測定の初めと終わりで流量に変化がないことを確認する。

測定部ガラス管の内径は、細管による粘度測定で利用されるような円管全長における平均半径を用いるのではなく、流速を測定する位置の管軸に直角な断面の半径を用いる。

しかし、ガラス管は多少デーバ管であるので、ガラス管両端面の直径を測定し、デーバを考慮して内挿法により流速の測定位置の半径を決定する。両端面の直径は、

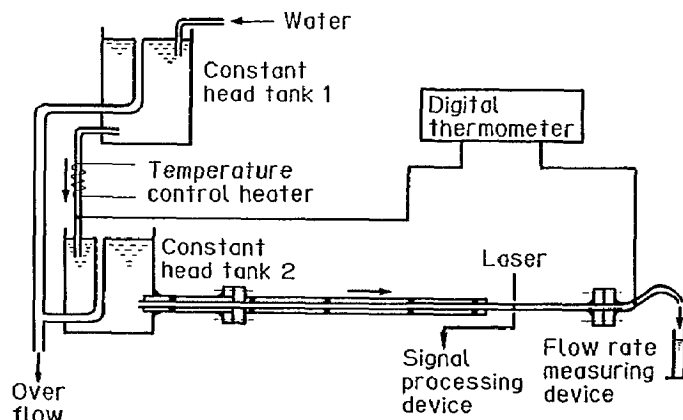


Fig. 2 Schematic arrangement of the experimental apparatus

内径測定用のホールテスト（標準リングで器差を校正したもの）を用いて、それぞれ断面の円周方向に位置を変えて10回測定し平均値を算出して求める。

Table. 2 に示すような半径のことになった9種類のガラス管に対して実験し、各ガラス管とも、壁面の表面状態はシリコン油で表面処理した場合（シリコン処理）となにも処理しない場合（非処理）の2通りとした。

水道水の粘度は Capillary viscometer (Ubbelohde's viscometer) により測定し、表面張力は Drop weight method⁴⁾ により次式を用いて算出する。

$$\sigma_L = \frac{\sigma_0}{M_0} M$$

ここに、 M_0 ：細管先端から滴下した純水の質量

M ：細管先端から滴下した水道水の質量

σ_0 ：純水の表面張力

σ_L ：水道水の表面張力

水道水とガラス面との接触角は Fig. 3 に示すような測定原理の Capillary rise method⁵⁾ により次式を用いて算出する。

$$\theta_t = \cos^{-1} \left(\frac{Rh\rho g}{2\sigma_L} \right)$$

ここに、 g ：重力の加速度

h ：細管の内外の液面の差

R ：細管半径

θ_t ：接触角

5. 実験結果と考察

Table. 1 に実験に使用した水道水の物性値および水道水とガラス面との接触角（非処理とシリコン処理）の測定結果と各測定値の相対誤差（平均値の平均2乗誤差から求めた）の百分率を示す。

Table. 2 には、9種類のガラス管について、非処理とシリコン処理の場合における平均流速当りの最大流速の測定結果を示す。

Reynolds 数はすべて150～500の範囲内で、流れの状

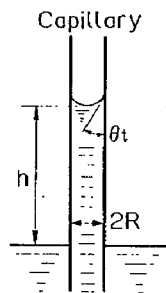


Fig. 3 Capillary rise method for measuring the contact angle

Table. 1 Physical properties of the city water (at 15°C)

| Physical properties | Measured values | Relative errors (%) |
|--------------------------|---|---------------------|
| Coefficient of viscosity | 1.228 mPa.s | 0.20 |
| Density | 999.5 kg/m ³ | 0.030 |
| Surface tension | 73.78 mN/m | 0.042 |
| Contact angle | Non-treatment 4.07° Silicone treatment 69.7° | 0.28 |

Table. 2 Measured values on w_{\max}/\bar{w} (at 15°C)

| No. | a (cm) | w_{\max}/\bar{w} | |
|-----|-------------|--------------------|--------------------|
| | | Non-treatment | Silicone treatment |
| 1 | 0.5346 | 1.9885 | 1.9801 |
| 2 | 0.6314 | 1.9863 | 1.9770 |
| 3 | 0.7303 | 1.9843 | 1.9729 |
| 4 | 0.8811 | 1.9814 | 1.9683 |
| 5 | 0.8836 | 1.9812 | 1.9671 |
| 6 | 1.0314 | 1.9774 | 1.9632 |
| 7 | 1.0945 | 1.9765 | 1.9600 |
| 8 | 1.0963 | 1.9769 | 1.9599 |
| 9 | 1.3113 | 1.9733 | 1.9524 |

Table. 3 Calculated values of relative errors to respective measurands of pipe radius a , flow rate Q and maximum flow velocity w_{\max}

| Factors | Relative errors (%) |
|------------|---------------------|
| a | 0.056 |
| Q | 0.040 |
| w_{\max} | 0.015 |

態は層流であり、また、最大流速の測定中における流速変動率〔(最大値－最小値)/最小値〕を求めると、各ガラス管とも0.06%以下であり、管内流れは定常流とみなすことができる。

Table. 3 に円管半径 a 、流量 Q および最大流速 w_{\max} の測定精度について、それぞれの相対誤差の百分率を示す。

ガラス管は機械吹きの硬質ガラス管を用いたが、現在のガラス管の製造技術では多少のデーパ管になることは避けられない。

ガラス管のテーパ度⁶⁾については、ガラス管の両端面の半径をそれぞれ a_1 および a_2 ($a_2 > a_1$) とすると、($a_2 -$

a_1/a_1 で表されている。

本実験に用いたガラス管 (半径 0.5~1.5 cm の範囲) はテーパ度が 5×10^{-3} 以下のテーパ管であるが, 層流助走距離をガラス管入口から 1700 mm にとった場合の 1700 mm の間における直径の変化による流速の変化率は 0.02 % 以下であり, 流速の測定点を 1700 mm の位置とすれば速度一定の一樣流れとみなし得る。

さらに, 流れの方向に対し半径が大になる場合と逆の場合とで, 層流助走距離 1700 mm における最大流速の差異は認められない。

このようなことから, 流速におよぼすガラス管のテーパの影響は, 層流助走距離を 1700 mm に取り, テーパ度が 5×10^{-3} 以下であれば無視できるものと考えられる。

また, ガラス管が真直でなく曲率半径 R' の円弧状に曲がっている場合ですべりを考慮したときの流量 Q' は伊藤の式⁷⁾ を利用して次式のように表すことができる。

$$Q' = \left(\frac{\pi a^2 \Delta p}{8 \eta l} + \pi a^2 w_a \right) \left(1 + \frac{1}{48} \frac{a^2}{R'^2} + \dots \right)$$

上式において, $a^2/48R'^2 \ll 1$ であれば(3)式に近似することができる。

実験に使用したガラス管半径は 0.5~1.5 cm であり, 流量の測定精度を ± 0.001 で行うとすれば, ガラス管の曲がりによる影響は ± 0.0001 以下であれば良いと考えられるので, ガラス管の曲がりの曲率半径 R' の範囲は

$$R' > \sqrt{\frac{1.5^2}{48 \times 0.0001}} \doteq 22 \text{ cm}$$

となり, 機械吹きガラス管の場合には十分にこれを満足しており, ガラス管の曲がりの影響は無視できる。

さらに, ガラス管の断面は厳密には真円ではないので, 断面を長軸 a_0 , 短軸 b_0 とするダ円と考えた場合ですべりを考慮した直管のときの流量 Q'' は, 伊藤の式⁷⁾ を利用してつぎのように求められる。

$$Q'' = \frac{\pi a_m^4 \Delta p}{8 \eta l} + \pi a_m w_a$$

ここに,

$$a_m^2 = \frac{2a_0^3 b_0^3}{a_0^2 + b_0^2}$$

そこで, 半径の測定を10回行い, それらの平均値を \bar{a} とし, 測定値の最大値を a_1 , 最小値を b_0 とした断面がダ円のガラス管を考えると, 上式から求められる a_m と \bar{a} との差の \bar{a} に対する値の絶対値 $\varepsilon = |(a_m - \bar{a})/\bar{a}|$ が 1×10^{-4} 以下であればガラス管の半径を平均値 \bar{a} とした円管としても測定精度内でさしつかえないものと考えられる。

Fig. 4 は, 実験に使用したガラス管について, ε と \bar{a}

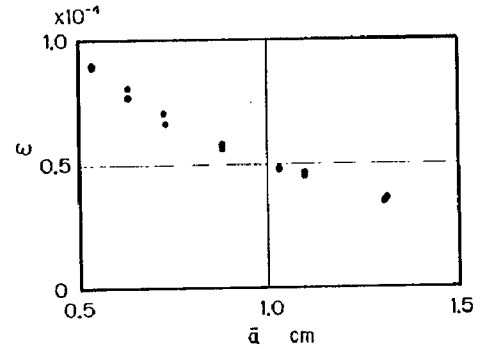


Fig. 4 ε vs. \bar{a} (the mean values of radius)

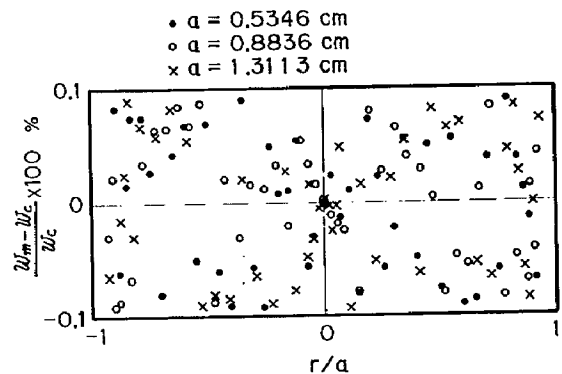


Fig. 5 Residual between the measured and calculated values of the flow velocity versus r/a at the various pipe radii

との関係を求めたもので, ε の値はすべて 1×10^{-4} 以下となっており, この場合, ガラス管半径は10回測定した値の平均値を用いてもさしつかえない。

Fig. 5 は3種類のガラス管について, すべりを考慮した(1)式を用い, 流速測定値から最小2乗法により流速分布曲線を求め, 測定値との残差の割合を百分率で表したもので, 測定値は各ガラス管とも ± 0.1 %以内で(1)式を満足しており, 流速分布は Hagen-Poiseuille 流れにすべり速度を加算したものと考えることができる。

Table. 1, Table. 2 の測定値と(5)式および(15)式を用い最小2乗法により無次元係数 C_s と指数 $n1$, $n2$ および $n3$ の最確値を求めると, $C_s = 4.124 \times 10^{-8}$, $n1 = 0.1949$, $n2 = 1.983$ および $n3 = -0.9957$ となり, 近似的に $n1 = 0.2$, $n2 = 2$ および $n3 = -1$ とおくことにより(15)式はつぎのように表すことができる。

$$\frac{w_a}{\bar{w}} = 1 - \frac{1}{1 + C_s \theta t^{0.2} R_c^2 W_c^{-1}}$$

上式を用い, 無次元係数 C_s を各ガラス管について算出すると, その算術平均値は 3.74×10^{-8} および平均値の平均2乗誤差は $\pm 0.02 \times 10^{-8}$ となり, すべり速度比 w_a/\bar{w} に関する実験式が次式のように得られる。

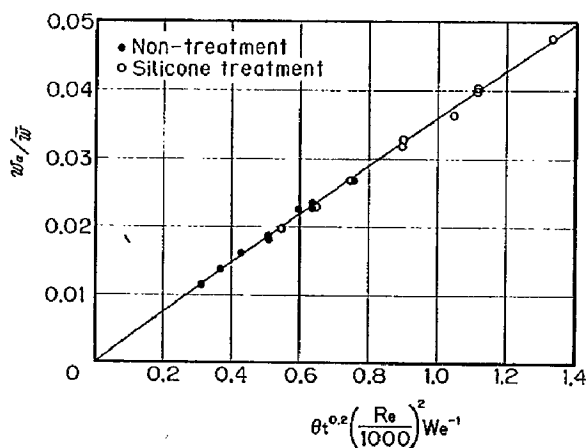


Fig. 6 Experimental results on the slippage velocity ratio expressed by the ratio of the slippage to the mean velocity

$$\frac{w_a}{\bar{w}} = 1 - \frac{1}{1 + 0.0374 \theta_i^{0.2} \left(\frac{Re}{1000}\right)^2 We^{-1}} \quad (16)$$

($4^\circ < \theta_i < 70^\circ$, $140 < Re < 471$, $0.04 < We < 0.22$)

Fig. 6 は測定値から求めたすべり速度比と上の実験式をグラフに表したもので、実験式と測定値から求めた w_a/\bar{w} との差は $\pm 5\%$ 以下であり、実験式はかなりよく正確にすべり速度比 w_a/\bar{w} を表しており、かつ、(16) 式により、円管内壁面の表面状態あるいは半径などの違いにかかわらずすべり速度比 w_a/\bar{w} を統一して表すことができる。

(14) 式の関係を考慮することにより、すべり無次元量 β^* についての実験式がつぎのように導かれる。

$$\begin{aligned} \beta^* &= 1.87 \times 10^{-8} \frac{\theta_i^{0.2} Re^2}{We} \\ &= 3.74 \times 10^{-8} \frac{\theta_i^{0.2} \rho \sigma_L a}{\eta^2} \end{aligned}$$

また、すべり指数¹⁾ γ は

$$\gamma = \frac{\beta^*}{m} = 7.48 \times 10^{-8} \frac{\theta_i^{0.2} \rho \sigma_L}{\eta^2}$$

となる。

このように、すべり指数 γ は液体の物性値である粘度 η 、密度 ρ および表面張力 σ_L と液体と固体表面との接触角 θ_i によって表され、すべり指数 γ が Fig. 7 に示すように円管半径には関係なく壁面の同じ表面状態に対し一定となることを裏付けている。

なお、液体と固体表面との接触において、固体表面の一部が液体・固体界面でおきかえられる現象を「ぬれ」といい、このぬれによって単位面積の液体界面と固体界面を生成させるのに必要な仕事を付着仕事 W と呼び、

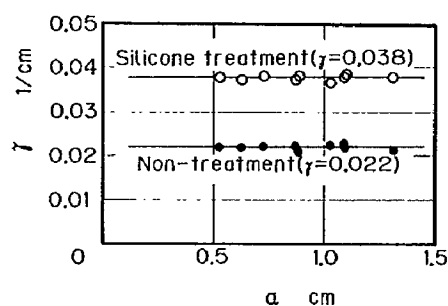


Fig. 7 Slippage indexes for the pipe in the state of non-treatment and Silicone treatment, respectively

Young-Dupre の方程式⁸⁾により次式のように表される。

$$W = \sigma_L (1 + \cos \theta_i)$$

上式において、接触角 θ_i が大きくなると付着仕事は小さくなり、固体表面は液体でぬれにくくなり、固体表面上で液体はすべり易くなる。

また、 $\theta_i = 0$ となると、付着仕事は最大となり、固体表面は液体で完全にぬれ、液体は固体表面上ですべらないとみなされる。

以上のようなことから、液体の壁面流動すべりは接触角 θ_i の大きさに左右されるものと考えることができる。

6. 結 言

円管内液体流れにおいて、円管内壁面上の液体の流動すべりに関して行った次元解析により、すべりに関与する諸因子とすべり速度との関係が求められ、つぎのような結論を得た。

1. すべり速度比は Reynolds 数、Weber 数および液体と固体表面との接触角の 3 個の無次元量の関数として表すことができる。

2. この関係を利用して、すべり速度比に関する実験式が求められ、この実験式により壁面の表面状態あるいは半径などの違いに対するすべり速度比を 1 つの式で統一して表現できる。

3. すべり指数は液体の物性値（粘度、密度および表面張力）と液体と固体表面との接触角のみによって表される。

4. それゆえ、液体の壁面流動すべりは接触角に左右される。

最後に、本研究をまとめるにあたり、終始有益なご意見およびご指導いただいた元明治大学工学部豊沢陽二教授および明治大学工学部山本健太郎教授ならびに原田正一教授に謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) 小島昇：円管内壁面流動すべりの測定法，計測自動制御学会論文集，19-1，41/47 (1983)
- 2) Horace Lamb: Hydrodynamics, 585/587, Cambridge Univ. Press (1975)
- 3) 江守一郎他：模型実験の理論と応用，59，技報堂出版 (1982)
- 4) 渡辺信淳他：表面および界面，6，共立出版，(1973)
- 5) 近藤保：界面化学，21，三共出版 (1975)
- 6) 倉瀬公男：細管法による粘度の絶対測定に関する研究，計量研究所報告，25-3，7 (1976)
- 7) 伊藤英覚：直管および曲管内の層流理論（第一報），日本機械学会論文集，17-60，133 (1951)
- 8) 小野周：表面張力，77，共立出版 (1980)